8卷 3期
1996年7月

动物营养学报
ACTA ZOONUTRIMENTA SINICA

Vol.8, No.3, 31～37
Jul.1996

考虑养分变异性的最低成本饲料配方模型

孙文志 张忠远
(东北农业大学动物科学系,哈尔滨,150030)

摘要 饲料原料中养分的变异性会影响到配合饲料的质量。可以用正态分布模型来描述养分的变异性。通过非线性随机规划模型(SP)或带有安全裕量的线性规划模型(LPMS)可以在饲料配方过程中对原料的变异性加以处置。SP模型的可行域是凸性的,这使其成为一种有效的寻找全局最优解的算法。拟制配方过程中若以相同的置信水平来满足养分在饲粮中的含量时,SP模型比LPMS模型有着更好的准确性和更低的饲粮成本。利用SP模型可针对饲粮中养分的含量分布加以优化,并且为饲料产品质量的持续稳定性提供可靠的保障。

关键词 饲料配方 养分变异性 线性规划 随机规划 安全裕量

1 养分的变异性及其统计学分布模型

1.1 养分的变异性

在配合饲料生产过程中,会遇到饲料原料及其配合产品中所含养分的变异问题。这种变异的来源有许多途径,如饲料原料自然发生的变异、不恰当的混合以及养分分析过程中的随机误差等。不难想象,饲料原料的变异会影响到其配合产品质量的一致性和稳定性。

早在60年代Chung和Pfost(1964)、Van和Popp(1963)等就提出了饲料中养分的变异性问题。Duncan(1973)系统地研究了养分变异性对饲料质量控制以及动物生产性能的影响。据Duncan(1986)报道,尽管某种饲粮中养分的平均浓度是适宜的,可是当其变异系数增大时,动物的表现便显得较差。

要通过变动着的原料来生产始终如一的配合饲料,就必须在饲料配方的拟制过程及饲料的混合加工过程中考虑原料养分的变异性问题。Duncan(1986)曾阐述了在原料管理及混合过程中如何降低养分的变异性。本文讨论如何在拟定饲料配方时考虑养分的变异性,为此,可以利用数理统计来构造养分水平的分布模型,饲料原料的养分变异情况随之便可以结合到最低成本的饲料配方当中。

1.2 养分变异性的分布模型

根据Chung和Pfost(1964)的报道,可将原料$j(j=1,\cdots\cdots,n)$中养分含量Y_j看作是一个独立且服从于正态分布的随机变量,$Y_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$。那么由几种原料混合而成的饲粮中养分含量Y也是一个正态分布随机变量,即:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j Y_j \qquad 且 \qquad Y \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j, \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 X_j^2\right)$$

收稿日期: 1995-04-11

式中,X_j是饲粮中第j种原料所占的份额。

利用均值和方差概念便可以定量地描述养分的变异性。由于动物研究依赖于对试验日粮中养分水平的准确估计,有关养分组成的均值和方差的知识能使试验结果更有意义,也能使家畜生产获益更大。

对一种饲料原料进行随机采样并分析样品中的养分含量,可算得其养分含量的均值和方差。从理论上讲,饲料厂商成批收到的饲料原料中有一半在养分含量上要低于平均值,另一半则高于平均值。标准偏差的大小可以反映养分的变异程度,它衡量所有养分含量值靠近平均值的情形。

根据统计学理论,如对饲粮随机抽样并分析样品中的养分含量,则某一样品养分含量小于其均值的概率是50%。如果使用线性规划模型并依据原料中养分含量的均值数据来制定最低成本的配方,模型中的右端项(RHS)定为动物的最小需要量,那么当从按该配方加工出的饲粮中抽样检查时,某一样品发生营养缺乏的概率是50%。这样的饲粮的质量不够稳定,用其饲喂动物的效果难以保障,还会因质量问题引发纠纷,从而失去用户的信任。

要提高抽样合格的成功率,可以采取若干种配方策略。这些策略可分成两种:一种是仍然采用线性规划法,但调高需要量(RHS)的规格;另一种则是通过原料所含养分的方差信息对配合饲料中养分的分布进行优化,即有控制地压低养分的均值,给养分的均值加上一个"安全裕量"。第一种策略不对变动很大的原料和始终一贯的原料加以区辩,并造成养分的浪费。由于对养分浪费的环境方面日渐关注,所以对养分有效地加以利用尤其重要。第二种策略则有着较合理的数学依据和背景,可在满足预定要求的前提下有效地节省饲料资源。

2 考虑养分变异性的两种饲料配方模型

2.1 随机规划(Stochastic Programming, SP)模型

随机规划模型使用非线性的数学算法,是将原料中养分水平的均值和方差结合起来,一并用来进行饲料配方。正态分布的性质被用来估计每种饲料中的养分含量。为阐明随机性规划问题,先要从确定性规划的代表线性规划(Linear Programming, LP)模型说起。

对于确定最低成本日粮的LP模型而言,其目标函数以及约束条件都是确定的。由于未能考虑原料养分的变异性,所以无法对混合后养分水平的达成情况提供更大的保障。LP算法可用数学符号表述如下:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \tag{1}$$

服从于:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, p) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leqslant b_i \quad (i = p+1, p+2, \cdots\cdots, m) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1 \tag{4}$$

$$X_j \geqslant 0 \tag{5}$$

式中：　i — 所考虑 m 种养分中的第 i 种，$i = 1, \cdots\cdots, m$；

j — n 个候选原料中的第 j 种，$j = 1, \cdots\cdots, n$；

Z — 配方成本，为模型中的目标函数；

X_j — 第 j 种原料在饲粮中所占的份额，为模型中的决策变量；

c_j — 第 j 种原料的单价；

b_i — 养分 i 的最小或最大需要量；

a_{ij} — 第 j 种原料中第 i 种养分的含量，在此处为含量的均值；

p — 大于等于的约束个数；

$(m - p)$ — 小于等于的约束个数。

对于每种养分，LP 配方算法固定地保证约束(2)或(3)式有 $P \geqslant 50\%$ 的成功率。若要增加满足某一特定养分 b_k 的成功率至 $P \geqslant \alpha_k$，则(2)式中的某一约束条件可以转化成以下公式：

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} X_j \geqslant b_k\right) \geqslant \alpha_k \tag{6}$$

对于(3)式则有：

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} X_j \leqslant b_k\right) \geqslant \alpha_k \tag{7}$$

$P(A)$ 在这里代表发生事件 A 的概率。用(6)、(7)式的随机性约束条件分别取代(2)、(3)式的确定性约束条件，则(1)、(4)、(5)、(6)和(7)式即构成一种具有普遍意义的随机规划模型(D' Alfonso 等，1993；Van De Panne，1963)。

Van De Panne 和 Popp(1963) 指出，假设 a_{ij} 是独立的且服从于正态分布的随机变量，有 $a_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$，则(6)式的约束条件可被简化成以下形式：

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} X_j + Z_i \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 X_j^2\right)} \geqslant b_i \tag{8}$$

同样(7)式可转化为：

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} X_j + Z_i \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 X_j^2\right)} \leqslant b_i \tag{9}$$

其中 Z_i 是对应于 α_i 的标准正态偏离值(standard normal deviate)，即对于随机变量 $X \sim N(0, 1)$，有 $P(X > Z_i) = \alpha_i$。要注意的是，当 $\alpha_i \geqslant 50\%$ 时，对(8)式有 $Z_i \leqslant 0$，对(9)式则有 $Z_i \geqslant 0$。例如，如果在约束(8)中所需的成功率是 $P \geqslant 95\%$，则 $Z_i = -1.645$，因为标准正态分布中变量值大于或等于 -1.645 的概率是 95%。当高于最小需要量的概率增加时，Zi 也变得更负了。类似地，如果对(9)式有 $P \geqslant 95\%$，则 $Z_i = 1.645$。而当低于最大需要量的概率增加时，Z_i 也变得更正了。(8)与(9)式的约束条件是非线性的，这就妨碍了将它们直接结合到那些通过 LP 来解决最低成本饲料配方的软件包中去。

Van De Panne 和 Popp(1963)证明，当 $Z_i \leqslant 0$ 时，式(8)的约束条件会生成一个凸性可行域(convex feasible region)；同样，当 $Z_i \geqslant 0$ 时，式(9)的约束条件也会生成一个凸性可行域。由于凸性空间的交集仍是一个凸性空间，故 SP 模型的可行域也是一个凸性空间。凸性是一个

非常重要的性质，因为非线性规划的可行域往往是非凸性的，而这类非凸性的问题存在局部的极大或极小值，难以保障得到的解是全局最优的。SP 模型由于具有一个凸性可行域，因此成为一种确定最优解的有效算法。

由(1)、(4)、(5)、(8)和(9)式构成的 SP 模型可通过非线性规划程序来求解，如美国微软公司的组合软件 Excel 或专用的建模语言 GAMS 等(Brooke 等，1988)。本文作者已用 GAMS 编制出正确有效的 SP 配方程序。

2.2　具有安全裕量的线性规划(*Linear Programming with a Margin of Safety*，LPMS)模型

根据 Nott 和 Cambs(1967)、Shutze 和 Benoff(1981)的报道，LPMS 模型可用标准的 LP 程序求解，不过借助于标准偏差的一个乘数因子来对平均养分水平予以调整。Rahman 和 Bender(1971) 阐述了怎样用 LPMS 法来估算非线性的 SP 法。两种方法之间的根本差别在于，LPMS 使用线性规划并调整均值，而 SP 则直接在非线性程序中使用方差数据来进行最低成本饲粮配方。

Rahman 和 Bender(1971) 提出一种将 (8)、(9) 式中非线性项加以近似线性化处理的方法，即：

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}X_{j}^{2}} \approx \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}X_{j}$$

这样(8)式变成：

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}X_{j} + Z_{i}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}X_{j} \geqslant b_{i}$$

可简化作：

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij} + Z_{i}\sigma_{ij})X_{j} \geqslant b_{i} \tag{10}$$

(9)式则成为：

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij} + Z_{i}\sigma_{ij})X_{j} \leqslant b_{i} \tag{11}$$

对方差项的这种简化会在数学上产生误差，这种误差会随着方差项数以及其幅值的增加而增长。这种近似相当于用($\sqrt{c}+\sqrt{d}$)来代替 $\sqrt{c+d}$ (c、d 都是正实数)，一般有($\sqrt{c}+\sqrt{d}$) $>\sqrt{c+d}$。

约束 (10) 可解释为在每一变化的养分含量均值 μ_{ij} 的基础上减去一定的量，减少的量等于标准偏差的 Z_i 倍。当成功的概率 α_i 增加时，Z_i 变得更负，这表明为保证较大的成功率必须从均值水平上减去更大的数量。μ_{ij} 减少的量即是所谓的安全裕量 (margin of safety)，可以很方便地将其结合到使用 LP 的饲料配方软件当中去。由式(1)、(4)、(5)、(10)和(11)即构成具有安全裕量的线性规划(LPMS)模型。

Rahman 和 Bender(1971)承认，在相同参数下，式(10)的限制要严于式(8)，式(11)的限制则严于式(9)(注意 $\sqrt{c}+\sqrt{d}>\sqrt{c+d}$)。基于这一性质，连同其可行域是凸性空间的事实，为在相同参数下 SP 模型在最优解的成本上不会高于 LPMS 模型提供了先决条件，这是由于当 SP 模型与 LPMS 模型有着相同的目标函数时，LPMS 的可行解是 SP 可行解的一个子集合。

3 SP 法与 LPMS 法的对比

尽管 SP 及 LPMS 两种模型都是被设计来完成同样的任务，但由于 LPMS 模型比 SP 模型在限制上更为严格，故使用非线性 SP 模型进行日粮配方在经济上会占据优势。D' Alfonso 等(1992)报道，当用 SP 法代替 LPMS 法来配制典型的初期肉仔鸡饲粮时，每公吨大约可节省 0. 75～3 美元。当保证饲粮中的氨基酸水平在 90%置信水平下得以满足时，每公吨节省 5 美元以上。

D' Alfonso 等(1993)还在他们的研究中比较了在运用 SP 和 LPMS 两种方法下肉仔鸡的表现。试验结果表明，在相同条件下配制肉仔鸡的后期日粮时，SP 法的成本总是低于 LPMS 法(LP 则比 SP 还要低）。动物试验表明，SP 法与 LPMS 法处理的等价比较中，SP 法总要比 LPMS 更为有利。

对于考虑了其方差的那些营养素(蛋氨酸 + 胱氨酸、赖氨酸、钙以及有效磷)而言，LPMS 法与 SP 法在很大程度上进行了超配（overformulate)，这一点反映在增加了的概率水平上(D' Alfonso, 1993)。超配是 LPMS 饲粮的费用高于 SP 饲粮的原因。不可能事先知道 LPMS 法将发生在每个养分上的超配的数量。由于 LPMS 法只是对饲粮方差的一种线性近似，故非线性的 SP 配方过程在满足所需养分概率水平上更具准确性。SP 法与 LPMS 法之间的差别在很大程度上受到方差幅度大小的影响，当养分含量的变异性加大时，使用 SP 模型要比 LPMS 模型具有更大的优势。

D' Alfonso 等(1993)在蛋氨酸 + 胱氨酸、赖氨酸、钙以及有效磷这些养分的约束条件里所用的概率水平是 69%或 90%，并认为一般以 69%(对应的标准正态偏离值是 0.5)的把握去保证必需营养素的水平是最有利的策略。这一策略时常为人们所推崇。

4 存在问题及应用展望

4.1 养分的分布模型

以上 SP 模型中的一个关键性假设，就是原料中养分含量遵从正态分布，这点需要进一步加以检验。如果考虑到变量间的相互作用，或者在对养分水平的估计上有比正态分布函数更好的其它分布函数，则数学规划的模型将会发生很大的变化。未来的模型还应当包括变量间的相互作用，并且也应在现有确定性需要量的基础上引入随机的概念。另外，以上模型也可用在有效养分的概念上，对养分有效率的描述也应当采用随机模型。

4.2 置信水平

营养学家还需考虑保证满足养分需要量的成功概率定为多少合适。可能存在与每个营养素相关的最优的置信水平，根据动物生产性能、可用饲料原料的性质及成本，可以确定参数的最优值。对于限制性的养分，如氨基酸，可能需要较高的保障度；而其它养分利用线性规划的约束条件便可能得到足够的保障。

4.3 饲料成分表

在使用该项技术时，需要知道原料的方差信息。在目前常用的饲料成分表中，没能提供描

述原料养分变异的信息，只是简单地给出该原料养分含量的典型值或均值。因此国家需要组织人力做一系列基础性的工作，以便对现有的饲料成分表加以改造。

总之，养分变异性是不容忽视的客观事实，从变化中求不变或小变，为饲料产品质量的持续稳定性提供可靠的保障，这便是随机规划模型的目的所在。30年以前就有人提出了通过SP法来进行饲料配方的建议，但是直到近些年才具备商用的高效的计算机程序和硬件。对于饲料厂经纪人而言，若将SP法做为其质量控制策略的一部分，可望获得更加一致的饲粮。对于营养学家而言，可以通过SP法来对动物饲粮中养分的分布（而不仅仅是其均值水平）加以优化。随着我国饲料工业的发展，随机规划模型必将得到广泛的应用。

参考文献

Brooke A, Kendrick D, Meeraus, A. 1988. GAMS: A User's Guide. The Scientific Press, Redwood City, CA.

Chung D S, Pfost H H. 1964. Overcoming the effects of ingredient variation. *Feed Age*., 14(9):24~27

D'Aifonso T H, Roush W B, Cravener T L. 1993. Performance of broiler fed rations formulated by stochastic nonlinear programming or linear programming with a margin of safety. *Poultry Sci*., 72. 620~627

D'Alfonso T H, Roush W B, Ventura J A. 1992. Least-cost poultry rations with nutrient variability: A comparison of stochastic programming and linear programming with a margin of safety. *Poultry Sci*., 71:255-262

Duncan M S. 1973. Nutrient variation: Effect on quality control and animal performance. Doctoral Dissertation, Kansas State University, USA

Duncan M S. 1986. How to deal with ingredient variability. Pages 67~76 in: Proceedings of the American Feed Industry Association Nutrition Symposium. The American Feed Industry Association, Arlington, VA.

Duncan M S. 1988. Problems of dealing with raw ingredient variability. Pages 3~11 in: Recent Advances in Animal Nutrition, Eds. W. Haresign and D. J. A. Cole, Butterworths

Nott H, Combs G F. 1967. Data processing of feed ingredient composition data. *Feedstuffs*, 34:21~22

Rahman S A, Bender F E. 1971. Linear programming approximation of least-cost feed mixes with probability restrictions. *Amer. J Agric. Econ*., 53:612~618

Shutze J V, Benoff F E. 1981. Statistical evaluation of feed ingredient variation and procedures for determining number of samples needed for laboratory analysis. Pages 134~146 in: Proceedings Geogia Nutrition Conference for the Feed Industry, Atlanta, CA

Van De Panne C, Popp W. 1963. Minimum-cost cattle feed under probabilistic protein constrains. *Manage Sci*., 9:405~430

致谢：本文承蒙韩友文教授修改、指正，特表谢意。

MODELS OF LEAST COST RATION FORMULATION DEALING WITH NUTRIENT VARIABILITY

Sun Wenzhi　Zhang Zhongyuan

(Department of Animal Science, Northeast Agricultural University, Harbin, 150030)

ABSTRACT

The ration quality will be influenced by the nutrient variability in feed ingredients. The random normal distribution is used to model the nutrient variability. This ingredient variation can be dealt with stochastic nonlinear programming(SP) or linear programming with a margin of safety(LPMS). The SP model has a convex feasible region, lending itself to efficient algorithms for determining a global optimal solution. The SP formulation remains more accurate in meeting required probabilities of nutrients, and has an economic advantage over LPMS. The SP model has the ability to optimize the distribution of nutrient contents in ration ,and can afford more guarantees to the consistency of feed products.

Key words: Feed formulation , Nutrient variability , Linear programming , Stochastic programming , Margin of safety